7. Teoria da Perturbação Canônica

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Percival 1989, Reichl, 1992)

IFUSP

2024

Hamiltoniana Integrável / Um Grau de Liberdade (I. Percival, Cap. 8)

$$H(q,p) = H_0(q,p) + \epsilon H_1(q,p) \quad (|\epsilon| \ll 1)$$

Problema: conhecidas as soluções para $\varepsilon = 0$, obter de forma aproximada as soluções perturbadas, isto é, as soluções para $\varepsilon \neq 0$.

Conhecidas soluções para H_0 (J)

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(\phi, J) = H(I)$$

ϕ , J : variáveis de ângulo e ação de H_o, mas não de H
θ, I : variáveis de ângulo e ação de H, mas não de H_0.

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(\phi, J) = H(I)$$

Para $H = H_0(J)$ as soluções são: $J = J_0$ e $\phi = \omega(J)\, t + \phi_0$

Para $H = H(I)$ as soluções são: $I = I_0$ e $\theta = \Omega(I)\, t + \theta_0$

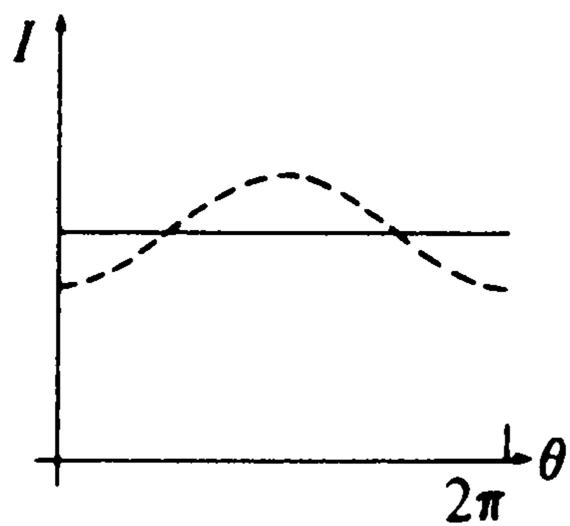
Problema:

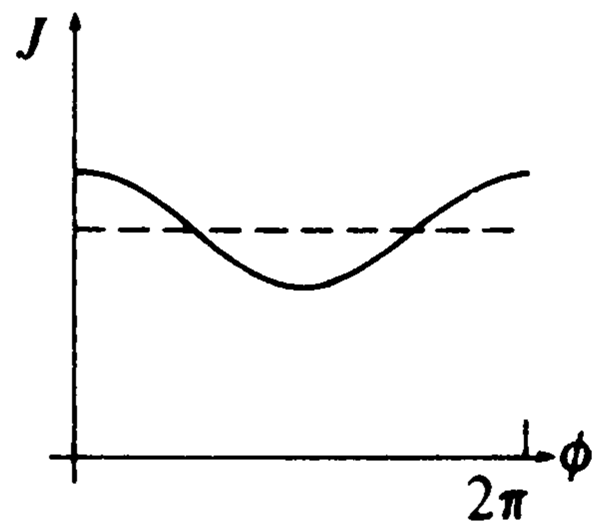
Conhecidas as soluções de $H_0(J)$, e a evolução das variáveis ϕ, J, obter as soluções de $H(I)$ e as variáveis θ, I.

Isso será feito pela teoria de perturbação canônica

Sistema não perturbado , $\varepsilon = 0$, $H = H_0(J)$

Sistema perturbado , $\varepsilon \neq 0$, $H = H_0(I)$





- - - trajetória (não perturbada) de H_0

___ trajetória (perturbada) de H

Antigas variáveis ϕ, J escritas em função das novas θ, I

Transformação Canônica

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \epsilon\, \phi^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$J = J^{(0)}(\theta, I) + \epsilon\, J^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2),$$

Nesse caso $I = I_0$ e $\theta = \Omega(I)\, t + \theta_0$

$$\epsilon = 0,\ \theta = \phi \text{ and } I = J \ \rightarrow\ \phi^{(0)}(\theta, I) = \theta \quad J^{(0)}(\theta, I) = I$$

Falta calcular os coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

Ângulos ϕ, θ com períodos 2π

Funções periódicas em θ, com período 2π $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

Valor médio, no intervalo de 0 a 2π, é nulo $\phi^{(1)}$

Transformação Canônica $$(\phi, J) \rightarrow (\theta, I)$$

$$[\phi, J] = \frac{\partial(\phi, J)}{\partial(\theta, I)} = 1$$

Áreas iguais no espaços de fase

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi J(\phi)$$

Hamiltoniana perturbada $K = H$

$$H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$$ Variáveis ϕ, *J*

$$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$$ Variáveis θ, *I*

K = H

$$K(I) = H_0(I + \epsilon J^{(1)}) + \epsilon H_1(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$= H_0(I) + \epsilon \left[J^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial I} + H_1(\theta, I) \right] + O(\epsilon^2)$$

$$K_0(I) = H_0(I),$$

$$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I)$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left(1 + \epsilon \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta} \right) (I + \epsilon J^{(1)}) + O(\epsilon^2)$$

$$= I + \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \, J^{(1)} + O(\epsilon^2),$$

$\dfrac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta}$ é periódica ➔ $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \, J^{(1)}(\theta, I) = 0$

$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \dfrac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I)$ Integrando em θ ➔

$$K_1(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \, H_1(\theta, I)$$

Conhecendo $$H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$$

Obtemos $$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$$

$$K_0(I) = H_0(I)$$

$$K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, H_1(\theta, I)$$

Calculo dos coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

De $$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I)\,\frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I)$$

obtemos $$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \qquad \omega_0 = \partial H_0/\partial I$$

[ϕ, J] = 1 ➔ $$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Considerando nula a média da função $\phi^{(1)}$

Conhecendo $H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$

Obtemos $K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$

$$K_0(I) = H_0(I) \qquad K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; H_1(\theta, I)$$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \qquad \omega_0 = \partial H_0 / \partial I$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Transformação Canônica

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \epsilon\, \phi^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$J = J^{(0)}(\theta, I) + \epsilon\, J^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2),$$

$$\phi^{(0)}(\theta, I) = \theta \quad J^{(0)}(\theta, I) = I$$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \qquad \omega_0 = \partial H_0/\partial I$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Exemplo: Pêndulo vertical em alta rotação

$$H = \tfrac{1}{2} p^2 - \alpha^2 \cos\psi \qquad \varepsilon = 1, \quad \alpha \approx 0$$

$$\tfrac{1}{2} p^2 \gg \alpha^2 \qquad \phi = \psi, \quad J = p$$

$$H_0 = \tfrac{1}{2} p^2 \qquad H_1 = -\alpha^2 \cos\psi$$

$$K_0(I) = \tfrac{1}{2} I^2$$

$$K_1(I) = -\frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta = 0$$

$$K = K_o(I)$$

Transformação Canônica

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \qquad \omega_0 = \partial H_0/\partial I = I$$

$$J^{(1)} = \frac{\alpha^2 \cos\theta}{I}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\alpha^2 \cos\theta}{I^2} \rightarrow \phi^{(1)} = \frac{\alpha^2 \sin\theta}{I^2}$$

$$K(I) = \tfrac{1}{2} I^2 + O(\alpha^4)$$

$$\phi = \psi = \theta + \frac{\alpha^2 \sin\theta}{I^2} + O(\alpha^4)$$

$$J = p = I + \frac{\alpha^2 \cos\theta}{I} + O(\alpha^4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} = I, \qquad \theta = It + \delta \qquad I = I_0$$

Evolução das variáveis de ângulo e ação

$$\psi = It + \delta + \frac{\alpha^2 \sin(It + \delta)}{I^2} + O(\alpha^4),$$

Evolução temporal das variáveis originais

$$p = I + \frac{\alpha^2 \cos(It + \delta)}{I} + O(\alpha^4).$$

Pêndulo Vertical / Oscilação com Amplitude Pequena

Hamiltoniana completa $H(\psi, p) = \frac{1}{2} p^2 - \alpha^2 \cos\psi$

Para aplicar a teoria da perturbação $\epsilon = 1$ $\alpha \approx 0$

Hamiltoniana aproximada

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) - \frac{1}{24} \epsilon \alpha^2 \psi^4 + O(\epsilon^2)$$

$$H_0(\psi, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) \qquad H_1 = -\frac{1}{24} \alpha^2 \psi^4 + O(\psi^6)$$

Obter variáveis de ângulo e ação ϕ, J de H_0

Vamos mudar de ϕ, J para θ, I $\quad H(\phi, J) = K(I)$

Variáveis de ângulo e ação de H_0 vistas anteriormente (oscilador harmônico)

Transformação canônica: $\psi = \left(\frac{2J}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\phi, \quad p = (2\alpha J)^{\frac{1}{2}} \cos\phi$

$$H(\phi, J) = \alpha J - \tfrac{1}{6}\epsilon J^2 \sin^4 \phi = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$$

$$K_0(I) = \alpha I$$

$$K_1(I) = -\tfrac{1}{6} I^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sin^4\theta = -\tfrac{1}{16} I^2$$

$$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$$

Cálculo da frequência Ω do movimento perturbado

$$K(I) = \alpha I - \tfrac{1}{16}\,\epsilon I^2 + O(\epsilon^2),$$

$$\Omega = \partial K/\partial I = \alpha - \tfrac{1}{8}\,\epsilon I + O(\epsilon^2)$$

Cálculo dos coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \rightarrow$$

$$J^{(1)} = -\frac{I^2}{\alpha}\left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{6}\sin^4\theta\right)$$

$$= -\frac{I^2}{12\alpha}\left(\cos 2\theta - \tfrac{1}{4}\cos 4\theta\right)$$

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I} \rightarrow \quad \phi^{(1)} = \frac{I}{12\alpha}\left(\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right),$$

Relações entre ϕ, *J* e θ ,*I*

$$\phi = \theta + \frac{\epsilon I}{12\alpha} \left[\sin 2\theta - \tfrac{1}{8} \sin 4\theta\right] + O(\epsilon^2)$$

$$J = I - \frac{\epsilon I^2}{12\alpha} \left[\cos 2\theta - \tfrac{1}{4} \cos 4\theta\right] + O(\epsilon^2)$$

$$\theta = \Omega t + \delta$$

Soluções em termos das variáveis originais

$$\psi = \left(\frac{2J}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\phi, \quad p = (2\alpha J)^{\frac{1}{2}} \cos\phi$$

$$\psi = \left(\frac{2I}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\epsilon I}{12\alpha}\left(\cos 2\theta - \tfrac{1}{4}\cos 4\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \quad \sin\left[\theta + \frac{\epsilon I}{12\alpha}\left(\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right)\right] + O(\epsilon^2)$$

Expandindo as funções até ordem ε:

$$\psi = \left(\frac{2I}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\theta + \frac{\epsilon I}{48\alpha} \left(3\sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin 3\theta\right) \right]$$

$$p = (2\alpha I)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\theta - \frac{\epsilon I}{32\alpha} \left(2\cos\theta - 3\cos 3\theta\right) \right]$$

Teoria da Perturbação (Lowenstein, Cap. 4)

$$K = E(J) = J - \frac{1}{16}\epsilon J^2 \qquad \omega(E) = \frac{dE}{dJ}(J(E))$$

ω com correção de primeira ordem (n=1) $$\omega(E) = 1 - \frac{1}{8}E$$

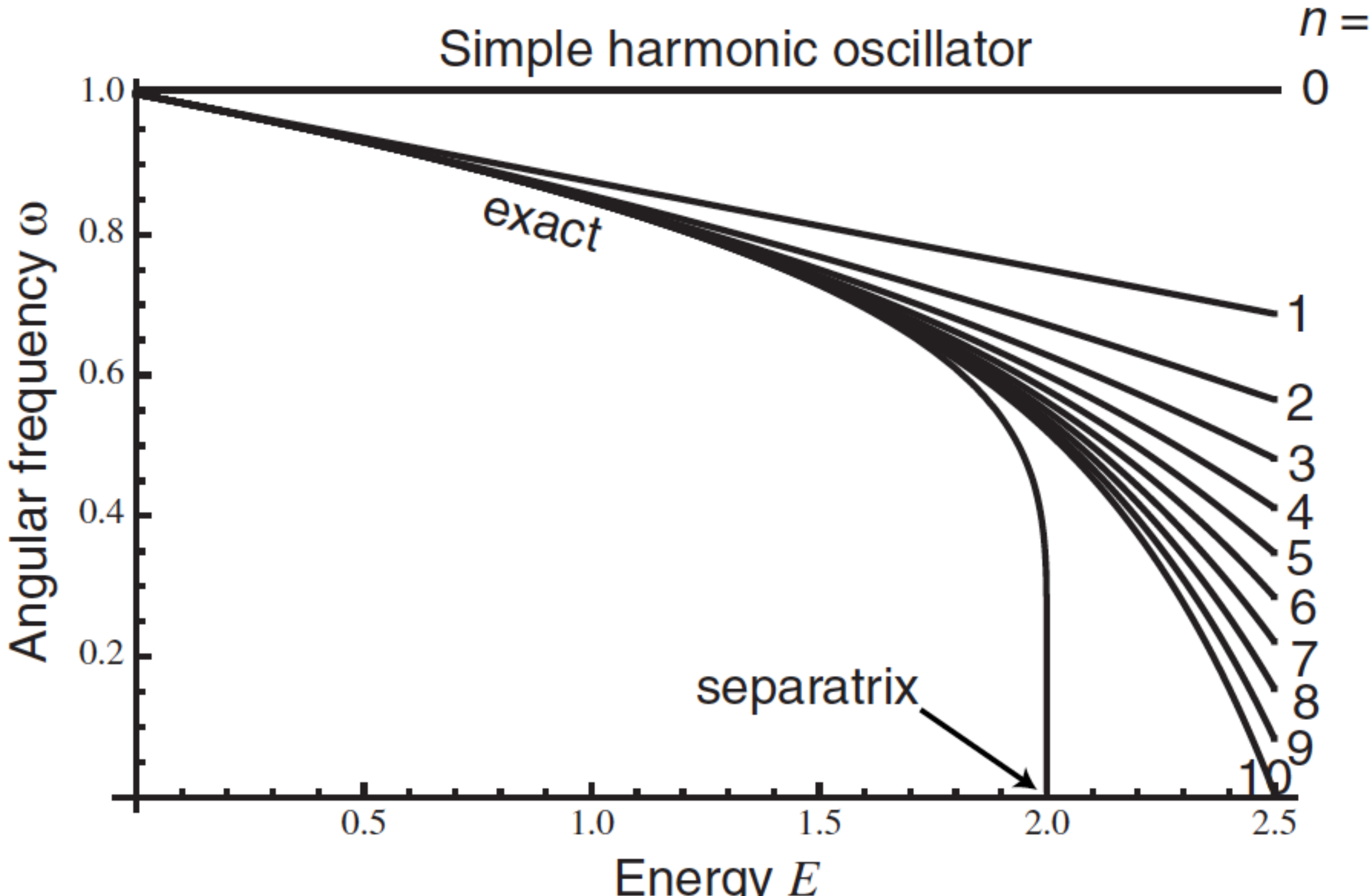
Resultado exato (Lowenstein, Cap. 4)

$$\omega(E) = \frac{\pi}{2}K(E/2)$$

Ordem n

$$E(J) = J - \frac{1}{16}\epsilon J^2 - \frac{1}{256}\epsilon^2 J^3 - \frac{5}{8192}\epsilon^3 J^4 - \frac{33}{262\,144}\epsilon^4 J^5 - \frac{63}{2\,097\,152}\epsilon^5 J^6 - \frac{527}{67\,108\,864}\epsilon^6 J^7 - \frac{9387}{4\,294\,967\,296}\epsilon^7 J^8 - \frac{175\,045}{274\,877\,906\,944}\epsilon^8 J^9 - \frac{422\,565}{2\,199\,023\,255\,552}\epsilon^9 J^{10} - \frac{4\,194\,753}{70\,368\,744\,177\,664}\epsilon^{10} J^{11}. \tag{4.5}$$

$$\omega(E) = 1 - \frac{1}{8}E - \frac{5}{256}E^2 - \frac{11}{2048}E^3 - \frac{469}{262\,144}E^4 - \frac{1379}{2\,097\,152}E^5 - \frac{17\,223}{67\,108\,864}E^6 - \frac{56\,001}{4\,294\,967\,296}E^7 - \frac{11\,998\,869}{274\,877\,906\,944}E^8 - \frac{41\,064\,827}{2\,199\,023\,255\,552}E^9 - \frac{571\,915\,951}{70\,368\,744\,177\,664}E^{10}. \tag{4.6}$$



Lowenstein, Cap. 4

Dois Graus de Liberdade (L. Reichl, Cap. 2)

Hamiltoniana Integrável

$$H_0(p_1, p_2, q_1, q_2) \; = \; H_0(J_1, J_2)$$

Variáveis de ângulo e ação $\quad (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$

Perturbação

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon V(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \qquad \epsilon \ll 1$$

Soluções são periódicas; expandindo em série de Fourier:

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1,n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Antigas variáveis de ângulo e ação de H_0 $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$

Novas variáveis de ângulo e ação de H $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2)$

Função geratriz da Transformação Canônica

$$G(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \theta_1, \theta_2) = \mathcal{J}_1\theta_1 + \mathcal{J}_2\theta_2 + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g_{n_1,n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \sin(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Vamos determinar g_{n_1,n_2}

4 relações entre as antigas e as novas variáveis

$$J_i = \frac{\partial G}{\partial \theta_i} = \mathcal{J}_i + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} n_i g_{n_1,n_2} \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

$$\Theta_i = \frac{\partial G}{\partial \mathcal{J}_i} = \theta_i + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_{n_1,n_2}}{\partial \mathcal{J}_i} \sin(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Substituimos θ_i e J_i na equação a seguir

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1,n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

$$H'(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2)$$
$$= H'_0(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} (n_1\omega_1 + n_2\omega_2) g_{n_1,n_2} \cos(n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2)$$
$$+ \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1,n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \cos(n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2) + O(\epsilon^2)$$

$$\omega_i = \frac{\partial H'_o}{\partial \mathcal{J}_i}$$

Escolhendo $g_{n_1,n_2} = -\frac{V_{n_1,n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}$

obtemos $H'(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2) = H'_o(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) + O(\epsilon^2)$

As novas ações podem ser obtidas de

$$J_i = \mathcal{J}_i - \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{n_i V_{n_1,n_2} \cos(n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2)}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} + O(\epsilon^2)$$

A transformação encontrada para as variáveis existe se

$$|n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \gg \epsilon V_{n_1,n_2}$$

A geratriz diverge se a órbita estiver na região de ressonância no espaço de fase

Resultado de validade geral, comum em vários sistemas!